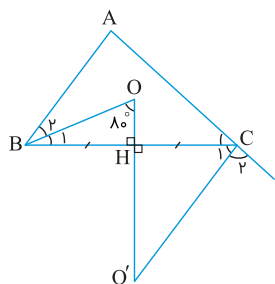


از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. در مثلث OBH به دست می‌آید: $\hat{B}_1 = 10^\circ$



BO نیمساز داخلی زاویه B است، پس $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 10^\circ$. در نتیجه: $\hat{B} = 20^\circ$
اکنون در مثلث ABC:

$$\text{زاویه خارجی } C = \hat{A} + \hat{B} = 100^\circ + 20^\circ = 120^\circ$$

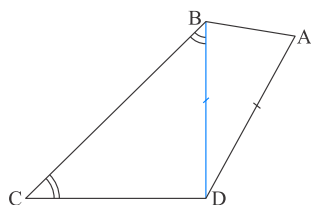
CO' نیمساز زاویه خارجی C است، پس:

$$\hat{C}_1 = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه O'CH به دست می‌آید:

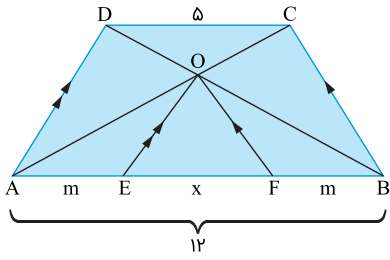
$$\angle CO'H = 90^\circ - \hat{C}_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \angle CO'O$$

توجه: دقت کنید که اگر OO' هر خط دلخواه دیگری هم که عمود بر BC باشد، باز هم همین جواب به دست می‌آید.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{DBC} = \hat{DCB} \Rightarrow BD = CD \\ AD = BD \end{array} \right\} \Rightarrow AD = CD$$

D از دو سر AC به یک فاصله است و در نتیجه D روی عمودمنصف AC است.



ابتدا ثابت می‌کنیم $AE = BF$:

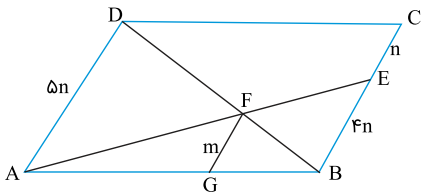
$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC : OF \parallel BC \Rightarrow \frac{BF}{AB} = \frac{OC}{AC} \\ \Delta BAD : OE \parallel AD \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{OD}{DB} \\ \Delta ODC \sim \Delta OBA \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{DB} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BF}{AB} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow BF = AE$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{OD}{OB} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow \frac{m}{m+x} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{m}{x} = \frac{5}{7} \quad (1)$$

$$AB = 12 \Rightarrow 2m + x = 12 \xrightarrow{(1)} \frac{10}{7}x + x = 12 \Rightarrow \frac{17}{7}x = 12 \Rightarrow x = \frac{84}{17}$$

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. باید نسبت $\frac{GF}{AD}$ یا $\frac{m}{5n}$ را به دست آوریم. می‌توان نوشت:



$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABD : \frac{FG}{AD} = \frac{BG}{AB} \\ \Delta ABE : \frac{FG}{BE} = \frac{AG}{AB} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} \frac{m}{5n} + \frac{m}{4n} = 1 \Rightarrow \frac{m}{n} \times \frac{9}{20} = 1 \Rightarrow \frac{m}{5n} = \frac{4}{9}$$

به ترتیب ضلع‌ها در تناسب توجه کنید.

$$\frac{3}{4} = \frac{5}{x} = \frac{6}{8} \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

دو مثلث متساوی الاضلاع همواره متشابه هستند، بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه است. یعنی اگر k نسبت تشابه باشد، به دست می‌آید:

$$\frac{S}{S'} = k^2$$

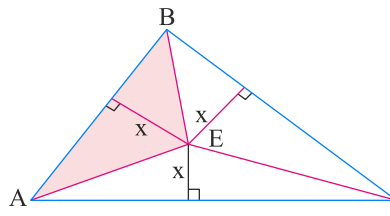
از طرف دیگر نسبت محیط‌های دو شکل متشابه برابر نسبت تشابه است؛ یعنی:

$$k = 9$$

اکنون می‌نویسیم:

$$\frac{S}{S'} = 9^2 = 81$$

می‌دانیم فاصله هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک اندازه است، پس:



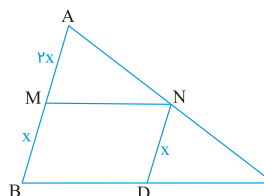
$$S_{\triangle ABE} = 18 \Rightarrow \frac{AB \times x}{2} = 18 \Rightarrow x = 18(1)$$

$$72 + BC + AC = 18(2) \Rightarrow BC + AC = 18(2)$$

$$S_{\text{سفید}} = S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ACE} = \frac{BC \times x}{2} + \frac{AC \times x}{2} = \frac{x}{2}(BC + AC)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} S_{\text{سفید}} = 4 \times 18 = 72$$

$$AB = \frac{1}{5}AM \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{1}{5} \Rightarrow AM = \frac{1}{5}MB$$



$$\frac{S_{AMN}}{S_{DNC}} = \left(\frac{AM}{DN}\right)^2 = 2^2 = 4$$

دو مثلث AMN و DNC متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها مجذور نسبت اضلاع است. پس:

دو مثلث ABC و BDE به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند ($\widehat{B}$ در هر دو مشترک است و $\widehat{D}_1 = \widehat{C}_1$). با نوشتن نسبت‌های تشابه به دست می‌آید:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{18}{24+x} = \frac{y}{24} = \frac{24}{48} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 12 \end{cases}$$

در نتیجه:

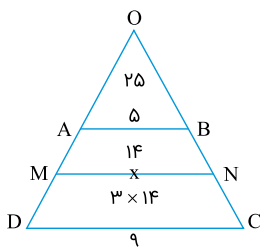
$$x + y = 24$$

دو ساق را امتداد می‌دهیم تا در نقطه O یکدیگر را قطع کنند. چون دو مثلث OAB و ODC متشابه هستند، پس:

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}} = \frac{25}{81}$$

فرض می‌کنیم $S_{OAB} = 25$ و $S_{OCD} = 81$ (توجه کنید که این فرض کلیت مسئله را دچار مشکل نمی‌کند).

چون $S_{ABNM} = \frac{1}{3} S_{MNC D}$ ، پس:



$$S_{ABNM} = 14, S_{MNC D} = 42$$

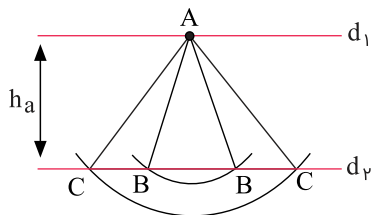
اکنون از تشابه دو مثلث OAB و OMN به دست می‌آید:

$$\frac{AB}{MN} = \sqrt{\frac{S_{OAB}}{S_{OMN}}} \Rightarrow \frac{5}{x} = \sqrt{\frac{25}{39}} \Rightarrow x = \sqrt{39}$$

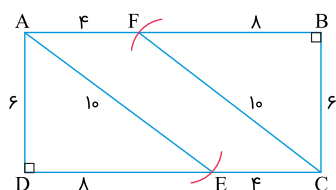
$$BC \parallel MN \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{x} &= \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow \frac{x+4}{x+4-x} = \frac{x+2}{x+2-x+1} \\ \Rightarrow \frac{x+4}{4} &= \frac{x+2}{3} \Rightarrow 3x+12 = 4x+8 \Rightarrow x = 4 \\ \Rightarrow AM &= x+4 = 4+4 = 8 \end{aligned}$$

برای رسم مثلث در حالت کلی با فرض $AH = h_a$, $AB = c$, $AC = b$ ابتدا دو خط موازی به فاصله h_a رسم می‌کنیم. از نقطه دلخواه A روی یکی از این خطوط دو کمان به شعاع‌های b و c رسم می‌کنیم، محل برخورد این کمان‌ها با خط دیگر را به ترتیب C و B می‌نامیم. واضح است که این مثلث در صورتی منحصر به فرد است که $AH = \min(b, c)$ ، بنابراین $AH = ۴$.



از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. در مثلث ADE ، بنا بر قضیه فیثاغورس:



$$DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

به دست می‌آید: $AF = AB - BF = 12 - 8 = 4$
اکنون می‌نویسیم:

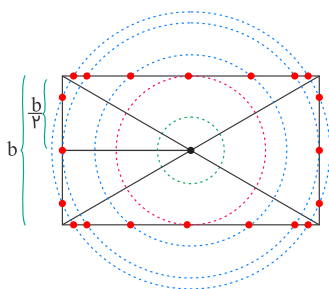
$$\frac{\text{محیط } AFCE}{\text{محیط } ADE} = \frac{2(4 + 10)}{6 + 8 + 10} = \frac{7}{6}$$

$$\begin{cases} DE \parallel BF \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EF} \\ DF \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FC} \end{cases} \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{AF}{FC}$$

$$\Rightarrow \frac{2-x}{x} = \frac{2}{2x+1} \Rightarrow -2x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

$$\Rightarrow FC = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

نقاطی که از مرکز مستطیل به یک فاصله هستند، روی دایره‌ای به مرکز مستطیل و شعاع r قرار دارند. باتوجه به شعاع دایره رسم شده ۳ حالت زیر پیش می‌آید:



(۱) $r < \frac{b}{\sqrt{2}}$ یعنی شعاع از نصف عرض مستطیل کمتر است. در این صورت دایره رسم شده (دایره سبز رنگ) با محیط مستطیل برخوردی ندارد و نقطه‌ای نداریم.

(۲) $r = \frac{b}{\sqrt{2}}$ یعنی شعاع برابر با نصف عرض باشد. در این صورت دایره رسم شده (دایره صورتی رنگ) در دو نقطه بر مستطیل مماس خواهد شد؛ پس دو نقطه داریم.

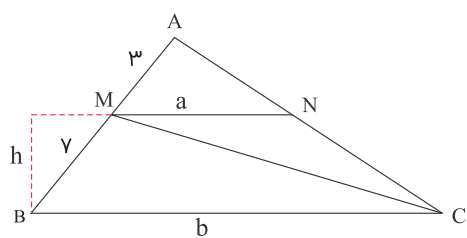
(۳) $r > \frac{b}{\sqrt{2}}$ یعنی شعاع بیشتر از نصف عرض باشد که در این صورت دایره‌های رسم شده (آبی رنگ) به ترتیب در ۴، ۶، ۸ نقطه محیط مستطیل را قطع خواهند کرد. (در صورتی که شعاع بیشتر از نصف طول مستطیل باشد، دایره با مستطیل برخورد ندارد) بنابراین $n = ۰, ۲, ۴, ۶, ۸$ خواهد بود که $n = ۴$ در گزینه‌ها وجود دارد.

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. با فرض $BM = x$ به دست می‌آید $MC = ۳x$. چون دو مثلث ABM و ABC در ارتفاع وارد از رأس A مشترک‌اند، پس نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است، یعنی:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{S_{ABC}} = \frac{x}{۴x} = \frac{۱}{۴}$$

به دست می‌آید:

$$S_{ABC} = ۸$$



بنا به قضیه تالس داریم: $\frac{a}{b} = \frac{۳}{۳ + \gamma} = \frac{۳}{۱۰}$ پس:

$$\frac{S_{MNC}}{S_{MBC}} = \frac{\frac{1}{2}h \times MN}{\frac{1}{2}h \times BC} = \frac{a}{b} = \frac{۳}{۱۰} = ۳۰\%$$